УДК 519.853

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ТИПА ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

З.Р. ГАБИДУЛЛИНА

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: zulfia.gabidullina@kpfu.ru

DECOMPOSITION METHODS FOR SOLVING ONE TYPE OF VARIATIONAL INEQUALITIES

Z.R. GABIDULLINA

Kazan Federal University

Аннотация

В настоящей работе мы изучаем декомпозиционные методы решения вариационных неравенств, тесно связанных с задачей линейного отделения множеств. Эти методы позволяют решать независимые подзадачи, на которые может быть разложено исходное вариационное неравенство, как последовательно, так и параллельно.

Ключевые слова: Вариационное неравенство, декомпозиция, параллельные вычисления.

Summary

In present paper, we treat the decomposition methods for solving the variational inequalities which are closely connected with the linear separation problem of sets. These methods allow one to solve the independent subproblems, into which the original variational inequality problem can be decoupled, successively as well as in parallel.

Keywords: Variational inequality, decomposition, parallel computing.

В течение нескольких прошлых десятилетий по настоящее время, научный интерес к вариационным неравенствам интенсивно возрастает. Данный интерес к вариационным неравенствам обусловлен широким кругом их приложений, возникающих из различных задач исследования операций.

В данной работе рассматривается решение вариационных неравенств, тесно взаимосвязанных с задачей линейного (в том числе, сильного и/или строгого) отделения различных множеств Евклидова пространства. Анализу задачи линейного отделения множеств посвящены, например, работы [1]– [4]. В работах [2]– [4] изучаются взаимосвязи решений вариационных неравенств с конусами обобщенно-опорных векторов (см. определения в [3]). В [4] доказано, что множества решений вариационных неравенств определенного типа совпадают с соответствующими конусами обобщенно-опорных векторов. Удобным инструментом, используемым при решении такого рода неравенств, является разность Минковского множеств. Следует отметить, что сложность выражения разности Минковского для различных типов множеств обычно является основным препятствием для её использования в прикладных целях. В [3] предлагается формула вычисления разности Минковского двух множеств, заданных с помощью конечных наборов точек $L := \mathrm{conv}\left\{z_i\right\}_{i\in I},\ M := \mathrm{conv}\left\{p_j\right\}_{j\in J}$, где $I = \left\{1, 2, \cdots, m\right\},\ J = \left\{1, 2, \cdots, k\right\}$, т.е.

$$L = \Big\{z \in \mathbb{R}^n : z = \sum_{i\in I} \alpha_i z_i,\ \sum_{i\in I} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i \in I\Big\},$$

$$M = \Big\{p \in \mathbb{R}^n : p = \sum_{i\in J} \beta_j p_j,\ \sum_{j\in J} \beta_j = 1,\ \beta_j \geqslant 0, j \in J\Big\}.$$

Разность Минковского этих множеств определяется по формуле $L - M = \mathrm{conv}\left\{z_i - p_j\right\}_{i\in I,\, j\in J}$. В том случае, когда одно из множеств задается системой неравенств, а другое множество задано произвольным образом (в том числе, оно может быть задано также системой неравенств), в [3] предложена аналитическая формула разности Минковского этих множеств.

Осуществленный в [4] анализ вырожденности конусов обобщенно-опорных векторов для непустых множеств $\Psi_j \subset \mathbb{R}^n,\ j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$ и множества $\Psi = \bigcap\limits_{j\in J} \Psi_j,\ \Psi \neq \emptyset$ позволяет сформулировать декомпозиционные методы решения, например, вариационных неравенств, состоящих в определении вектора $t \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbf{0}$ такого, что

$$\langle t, x\rangle \geqslant 0,\ \ x \in \Psi;$$

$$\langle t, x\rangle \geqslant \Delta,\ \ x \in \Psi, \Delta > 0;$$

$$\langle t, x - t\rangle \geqslant 0,\ \ x \in \Psi;$$

$$\langle t, x - p\rangle \geqslant 0,\ \ x \in \Psi\ \ (p - \text{произвольный вектор из } \mathbb{R}^n).$$

При этом декомпозиция может быть осуществлена как с помощью последовательных, так и параллельных вычислений. Решение независимых подзадач может быть выполнено как проективными методами, так и путем сведения к решению конечного числа оптимизационных задач меньшей размерности. Для стандартных множеств $\Psi_j, j \in J$ (таких, как полупространство, n-мерный шар, параллелепипед и т.д.) могут быть достигнуты дополнительные преимущества, поскольку для перечисленных множеств проекция вычисляется по хорошо известным точным формулам. Базой для координации полученных решений независимых подзадач может служить критерий линейной отделимости, предложенный в [3], или анализ вырожденности конусов обощенно-опорных векторов из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габидуллина З.Р.** Теорема отделимости выпуклого многогранника от нуля пространства и ее приложения оптимизации // Известия вузов. Математика. – 2006. – № 12. – С. 21–26.
2. **Gabidullina Z.R.** A Theorem on Strict Separability of Convex Polyhedra and Its Applications in Optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2011. – V. 148, № 3. – P. 550–570.
3. **Gabidullina Z.R.** A Linear Separability Criterion for Sets of Euclidean Space // Journal of Optimization Theory and Applications, Springer US. – 2013. – V. 158, № 1. – P.145–171.
4. **Gabidullina Z.R.** Necessary and Sufficient Conditions for Emptiness of the Cones of Generalized Support Vectors // Optimization Letters, DOI 10.1007/s11590-014-0771-5, Springer Berlin Heidelberg , ISSN: 1862-4480, Published Online: 1 August 2014, Available at http://link.springer.com/article/10.1007/s11590-014-0771-5, 37 p.

REFERENCES

1. **Gabidullina Z.R.** A Theorem on Separability of a Convex Polyhedron from Zero Point of the Space and Its Applications in Optimization // Russian Mathematics. – 2006. – V. 50, № 12. – P. 18–23.
2. **Gabidullina Z.R.** A Theorem on Strict Separability of Convex Polyhedra and Its Applications in Optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2011. – V. 148, № 3. – P. 550–570.
3. **Gabidullina Z.R.** A Linear Separability Criterion for Sets of Euclidean Space // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2013. – V. 158, № 1. – P. 145–171.
4. **Gabidullina Z.R.** Necessary and Sufficient Conditions for Emptiness of the Cones of Generalized Support Vectors // Optimization Letters, DOI 10.1007/s11590–014–0771–5, Springer Berlin Heidelberg , ISSN: 1862–4480, Published Online: 1 August 2014, Available at http://link.springer.com/article/10.1007/s11590–014–0771–5, 37 p.